نام و نام خانوادگی : .....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : .....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۴/۱/۲۷**

وقت : **۷۵** دقیقه

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۱-فنی (۷ گروه هماهنگ)**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۳۹۴- ۱۳۹۳**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

<u>در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.</u>

سوال۱ – الف) محاسبه کنید : $w = \dfrac{(1+\sqrt{3}\,i)^{10}}{(\sqrt{3}-i)^{7}}$ ۱۰ نمره

ب) معادله $z^{6} - 7z^{3} - 8 = 0$ را حل کنید. ۱۰ نمره

سوال۲ – تابع $f(x) = \begin{cases} x^{2} & x < -1 \\ -x & -1 \le x \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید تابع f یک به یک است. ۵ نمره

ب) وارون تابع f را بیابید. ۱۰ نمره

سوال۳ – حد زیر را بدون استفاده از قاعده هوپیتال و هم ارزی محاسبه کنید : ۱۵ نمره

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-x}-2}{\sin 3x}$$

سوال۴ – مشتق بگیرید : $g(x) = \sqrt{x^{3} + \sqrt{\sin x}} + x^{\sin x}$ ۱۵ نمره

سوال۵ – کمترین فاصله بین نقطه $(4,0)$ و منحنی $y^{2} = 4x$ را محاسبه کنید. ۱۵ نمره

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس ریاضی۱-فنی (۷ گروه هماهنگ)
نیمسال اول ۹۴-۱۳۹۳

جواب سوال۱ : الف)
$$w=\frac{(1+\sqrt{3}i)^{10}}{(\sqrt{3}-i)^{7}}=\frac{(2e^{\frac{\pi}{3}i})^{10}}{(2e^{-\frac{\pi}{6}i})^{7}}=\frac{2^{10}e^{\frac{10\pi}{3}i}}{2^{7}e^{-\frac{7\pi}{6}i}}=2^{3}e^{(\frac{10\pi}{3}+\frac{7\pi}{6})i}=8e^{(\frac{27\pi}{6})i}=8e^{\frac{\pi}{2}i}=8i$$

ب)
$$z^{6}-7z^{3}-8=0 \quad\to (z^{3}+1)(z^{3}-8)=0$$
$$\to\begin{cases} z^{3}=-1=e^{\pi i}\to z_1=e^{\frac{\pi}{3}i},\ z_2=e^{\frac{\pi}{3}i}\times e^{\frac{2\pi}{3}i}=e^{\pi i}=-1, z_3=e^{\frac{\pi}{3}i}\times e^{\frac{4\pi}{3}i}=e^{-\frac{\pi}{3}i} \\ z^{3}=8\to z_4=2,\ z_5=2e^{\frac{2\pi}{3}i}, z_6=2e^{\frac{4\pi}{3}i}=2e^{-\frac{2\pi}{3}i}\end{cases}$$
$$z_1=e^{\frac{\pi}{3}i},\ z_2=-1, z_3=e^{-\frac{\pi}{3}i},\quad z_4=2,\ z_5=2e^{\frac{2\pi}{3}i}, z_6=2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

جواب سوال۲ : الف) فرض کنیم $f(a)=f(b)$ سه حالت متفاوت را در نظر می گیریم.

۱) $a,b<-1$ بنابر این $a^2=b^2$ یعنی $a=b$ و یا $a=-b$ چون a و b همعلامت هستند پس باید $a=b$.

۲) $a,b\geq 1$ بنابر این $-a=-b$ یعنی $a=b$.

۳) $a<-1\leq b$ آنگاه $a^2>1$ و $-b\leq 1$ یعنی $a^2\neq -b$ پس $f(a)\neq f(b)$

یعنی اگر $f(a)=f(b)$ آنگاه $a=b$ که نتیجه می دهد f یک به یک است.

ب) تابع f یک به یک و پوشاست. برای پیدا کردن f^{-1} قرار می دهیم :
$$\begin{cases} f_1:(-\infty,-1)\to(1,\infty) \\ f_1(x)=x^2\end{cases},\quad \begin{cases} f_2:[-1,\infty)\to(-\infty,1] \\ f_2(x)=-x\end{cases}$$

وارون توابع f_1 و f_2 را می توان محاسبه کرد.
$$\begin{cases} f_1^{-1}:(1,\infty)\to(-\infty,-1) \\ f_1^{-1}(x)=-\sqrt{x}\end{cases},\quad \begin{cases} f_2^{-1}:(-\infty,1]\to[-1,\infty) \\ f_2^{-1}(x)=-x\end{cases}$$

وارون تابع f برابر است با :
$$f^{-1}(x)=\begin{cases} -x & x<1 \\ -\sqrt{x} & 1\leq x\end{cases}$$

جواب سوال۳ :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{\sin 3x}\times\frac{\sqrt{4-x}+2}{\sqrt{4-x}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sin 3x}\times\frac{1}{\sqrt{4-x}+2}=\frac{-1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{-1}{12}$$

جواب سوال۴ :
$$g(x)=\sqrt{x^3+\sqrt{\sin x}}+x^{\sin x}=\sqrt{x^3+\sqrt{\sin x}}+(e^{\ln x})^{\sin x}=\sqrt{x^3+\sqrt{\sin x}}+e^{(\ln x)(\sin x)}$$
$$g'(x)=\frac{3x^2+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{2\sqrt{x^3+\sqrt{\sin x}}}+[\frac{\sin x}{x}+(\ln x)(\cos x)]e^{(\ln x)(\sin x)}=\frac{6x^2\sqrt{\sin x}+\cos x}{4\sqrt{\sin x}\sqrt{x^3+\sqrt{\sin x}}}+[\frac{\sin x}{x}+(\ln x)(\cos x)]x^{\sin x}$$

جواب سوال۵ : نقطه دلخواه (x,y) را روی منحنی $y^2=4x$ در نظر می گیریم. فاصله آن تا نقطه $(4,0)$ برابر است با $d(x,y)=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$ کمترین مقدار d زمانی اتفاق می افتد که تابع $f(x,y)=(x-4)^2+y^2$ مینیمم شود.

تابع f را به یک تابع یک متغیره تبدیل می کنیم.

روش اول : حذف y
$$f(x)=(x-4)^2+4x=x^2-4x+16\to f'(x)=2x-4\ ,\ 2x-4=0\ \to\ x=2\ ,\ y=\pm 2\sqrt{2}$$

بنابر این کمترین فاصله بین نقطه $(4,0)$ و سهمی $y^2=4x$ برابر است با $d=2\sqrt{3}$.

روش دوم : حذف x
$$f(y)=(\frac{y^2}{4}-4)^2+y^2\quad\to f'(y)=\frac{y^3}{4}-2y\ ,\ \frac{y^3}{4}-2y=0\ \to\ \left|\begin{matrix} y=0 \\ x=0\end{matrix}\right.,\ \left|\begin{matrix} y=\pm 2\sqrt{2} \\ x=2\end{matrix}\right.$$

داریم $d(0,0)=4$ و $d(2,\pm 2\sqrt{2})=2\sqrt{3}<4$ یعنی جواب مساله $2\sqrt{3}$ است.

سیدرضا موسوی